

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

ÔN TẬP LƯỢNG GIÁC

1. Định nghĩa các giá trị lượng giác:

$$\overline{OM_1} = \cos \alpha$$

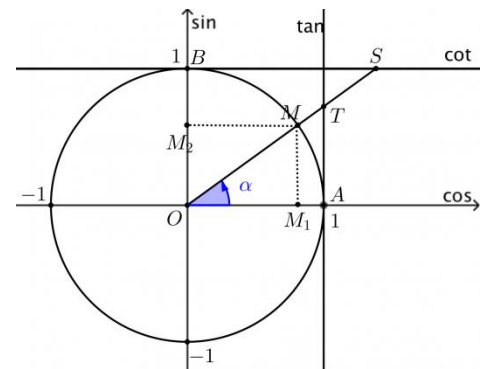
$$\overline{OM_2} = \sin \alpha$$

$$\overline{AT} = \tan \alpha$$

$$\overline{BS} = \cot \alpha$$

Nhận xét:

- $\forall \alpha, -1 \leq \cos \alpha \leq 1; -1 \leq \sin \alpha \leq 1$
- $\tan \alpha$ xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $\cot \alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi$



TÓM TẮT

❶ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN.

- ❑ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- ❑ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{với } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- ❑ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \text{với } \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- ❑ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \quad \text{với } \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- ❑ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{với } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- ❑ $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \text{với } \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

❷ GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CUNG ĐẶC BIỆT.

📖 Cung đối nhau. $\clubsuit \cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \clubsuit \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\clubsuit \tan(-\alpha) = -\tan \alpha \quad \clubsuit \cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	📖 Cung bù nhau. $\clubsuit \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad \clubsuit \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ $\clubsuit \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \quad \clubsuit \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$
📖 Cung phụ nhau. $\clubsuit \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \quad \clubsuit \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ $\clubsuit \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha \quad \clubsuit \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$	Cung hơn kém π. $\clubsuit \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \quad \clubsuit \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ $\clubsuit \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha \quad \clubsuit \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$

③ CÔNG THỨC CỘNG.

$$\clubsuit \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\clubsuit \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$$

$$\clubsuit \tan a \pm b = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$

$$\clubsuit \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

④ CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI VÀ HẠ BẬC.

$$\clubsuit \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\clubsuit \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\clubsuit \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Hạ bậc:

$$\clubsuit \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\clubsuit \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\clubsuit \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}.$$

⑤ CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG.

$$\clubsuit \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$\clubsuit \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\clubsuit \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$$

⑥ CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH.

$$\clubsuit \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\clubsuit \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\clubsuit \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\clubsuit \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

BÀI 1: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

NỘI DUNG LÝ THUYẾT

1. Hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$:

	$y = \sin x$	$y = \cos x$																					
Tập xác định	$D = \mathbb{R}$	$D = \mathbb{R}$																					
Chu kỳ	$T = 2\pi$	$T = 2\pi$																					
Tính chẵn lẻ	Lẻ	Chẵn																					
Sự biến thiên	$HSDB\ trên: \left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi ; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ $HSNB\ trên: \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi ; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$	$HSDB\ trên: (-\pi + k2\pi ; k2\pi)$ $HSDB\ trên: (k2\pi ; \pi + k2\pi)$																					
Bảng biến thiên	<table><tr><td>x</td><td>$-\pi$</td><td>$-\frac{\pi}{2}$</td><td>0</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td>π</td></tr><tr><td>$y = \sin x$</td><td></td><td>0 ↘</td><td>-1 ↗</td><td>0 ↗</td><td>1 ↘</td><td>0</td></tr></table>	x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$y = \sin x$		0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0	<table><tr><td>x</td><td>$-\pi$</td><td>0</td><td>π</td></tr><tr><td>$y = \cos x$</td><td>-1</td><td>↗ 1 ↘</td><td>-1</td></tr></table>	x	$-\pi$	0	π	$y = \cos x$	-1	↗ 1 ↘	-1
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π																		
$y = \sin x$		0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0																	
x	$-\pi$	0	π																				
$y = \cos x$	-1	↗ 1 ↘	-1																				
Đồ thị																							

2. Hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

	$y = \tan x$	$y = \cot x$
Tập xác định	$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Tập giá trị	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Chu kỳ	$T = \pi$	$T = \pi$												
Tính chẵn lẻ	Lẻ	Lẻ												
Sự biến thiên	ĐB trên $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$	NB trên mỗi khoảng: $(k\pi; \pi + k\pi)$												
Bảng biến thiên	<table> <tr> <td>x</td><td>$-\frac{\pi}{2}$</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td></tr> <tr> <td>$y = \tan x$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr> </table>	x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$y = \tan x$	$-\infty$	$+\infty$	<table> <tr> <td>x</td><td>0</td><td>π</td></tr> <tr> <td>$y = \cot x$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr> </table>	x	0	π	$y = \cot x$	$+\infty$	$-\infty$
x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$												
$y = \tan x$	$-\infty$	$+\infty$												
x	0	π												
$y = \cot x$	$+\infty$	$-\infty$												
Đồ thị														

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

Vấn đề 1. Tập xác định của hàm số lượng giác

Phương pháp

- Hàm số $y = \sqrt{f(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$ và $f(x)$ tồn tại
- Hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow f(x) \neq 0$ và $f(x)$ tồn tại.
- $\sin u(x) \neq 0 \Leftrightarrow u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos u(x) \neq 0 \Leftrightarrow u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1.$

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của hàm số sau:

1. $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

2. $y = \cot^2\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right)$

Lời giải:

1. Điều kiện: $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2. \text{ Điều kiện: } \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} - 3x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{9} - k\frac{\pi}{3}$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của hàm số sau:

$$1. y = \frac{\tan 2x}{\sin x + 1} + \cot\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$2. y = \frac{\tan 5x}{\sin 4x - \cos 3x}$$

Lời giải:

$$1. \text{ Điều kiện: } \begin{cases} \sin x \neq -1 \\ \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{18} + \frac{n\pi}{3}; k, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$2. \text{ Ta có: } \sin 4x - \cos 3x = \sin 4x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \\ = 2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos 5x \neq 0 \\ \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ \sin\left(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases}$$

$$\text{Vậy TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, \frac{\pi}{2} + n2\pi, -\frac{\pi}{14} + \frac{2m\pi}{7} \right\}.$$

Bài tập tự luyện: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

$$a/ y = \frac{1 - \sin 2x}{\cos 3x - 1} \quad b/ y = \sqrt{\frac{1 - \cos 3x}{1 + \sin 4x}} \quad c/ y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$d/ y = \frac{1}{\sin 2x - \cos 3x} \quad e/ y = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad f/ y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{\cos^2 x}}$$

Vấn đề 2. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

* Sử dụng phương pháp miền giá trị của hàm số lượng giác, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin x \leq 1 & -1 &\leq \cos x \leq 1 & 0 &\leq \sin^2 x \leq 1 \\ 0 &\leq |\sin x| \leq 1 & 0 &\leq |\cos x| \leq 1 & 0 &\leq \cos^2 x \leq 1 \\ 0 &\leq \sqrt{\sin x} \leq 1 ; 0 &\leq \sqrt{\cos x} \leq 1 & (\text{khi } \sin x \geq 0, \cos x \geq 0) \end{aligned}$$

Ví dụ 1. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau.

1. $y = 4 \sin x \cos x + 1$

2. $y = 4 - 3 \sin^2 2x$

Lời giải:

1 Ta có $y = 2 \sin 2x + 1$.

$$\begin{aligned} \text{Do } -1 &\leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \sin 2x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2 \sin 2x + 1 \leq 3 \\ &\Rightarrow -1 \leq y \leq 3. \end{aligned}$$

$$y = -1 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$y = 3 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3, giá trị nhỏ nhất bằng -1.

2. Ta có: $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 4 - 3 \sin^2 x \leq 4$

$$y = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$y = 4 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4, giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Bài tập tự luyện:

Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a/ $y = \sqrt{2 \sin x + 3}$

b/ $y = 1 - \sqrt{2 \cos^2 x + 1}$

c/ $y = 1 + 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

d/ $y = 3 - 2 \cos^2 3x$

e/ $y = \frac{4}{1 + 2 \sin^2 x}$

f/ $y = \sin^2 x + \cos 2x - 2$.

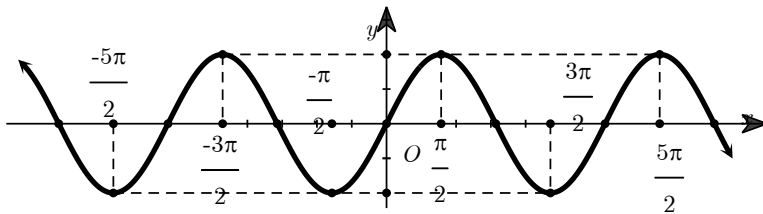
Vấn đề 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

Ví dụ 1 Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số sau $y = 2 \sin x$

Lời giải:

Hàm số $y = 2 \sin x$

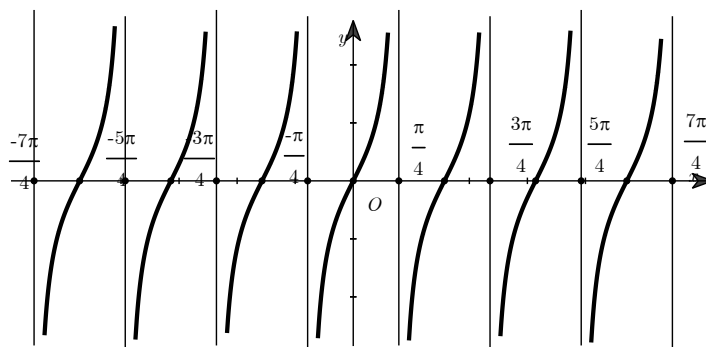
- TXĐ: $D = \mathbb{R}$
- Hàm số $y = 2 \sin x$ là hàm số lẻ
- Hàm số $y = 2 \sin x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$. Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi\right)$.
- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(k\pi; 0)$, $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; 2\right)$.



Ví dụ 2: Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số sau $y = \tan 2x$

Lời giải:

- TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Hàm số $y = \tan 2x$ là hàm số lẻ
- Hàm số $y = \tan 2x$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{\pi}{2}$.
- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.
- Các đường tiệm cận: $x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$.
- Đồ thị hàm số đi qua các điểm $\left(\frac{k\pi}{2}; 0\right)$.



Vấn đề 4. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số lượng giác

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D :

- Hàm số chẵn trên D nếu $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$.

- Hàm số lẻ trên D nếu $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

- Hàm số không chẵn, không lẻ trên D nếu:

$$\begin{cases} \exists x_0 \in D \Rightarrow -x_0 \notin D \\ \exists x_0 \in D: f(-x_0) \neq f(x_0) \neq -f(x_0) \end{cases}$$

○ **Chú ý:** $|x| = |-x|$; $(a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}, n \in \mathbb{R}$

$$(a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}, n \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 1: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau: $y = f(x) = 2x + \sin x$

Giải:

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$ là tập đối xứng

$$\forall x \in D, f(-x) = 2(-x) + \sin(-x) = -2x - \sin x = -(2x + \sin x) = -f(x)$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ trên D .

Bài tập tự luyện : Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a/ $y = x - \sin x$. b/ $y = \sin x - \cos x$.

c/ $y = 3 \cos x - 2$. d/ $y = \frac{\cos x}{x}$.